OŠ SIDE KOŠUTIĆ RADOBOJ

MATEMATIČKI LEKSIKON

Radoboj, 2012.

OŠ SIDE KOŠUTIĆ RADOBOJ

MATEMATIČKI LEKSIKON

PROJEKT

Predmet : Matematika

Mentor: Ivica Švaljek

Radoboj, 2012. godina

SADRŽAJ

Predgovor

Projekt Matematički leksikon je zamišljen kao izrada male skripte u kojoj bi se nalazili osnovni pojmovi koji su bitni za savladavanje gradiva matematike u osnovnoj školi. Pojmovi će biti objašnjavani abecednim redom, zbog lakšeg snalaženja. U izradu ovog projekta su bili uključeni učenici 5.a, 5.b, 8.a i 8.b razreda školske godine 2011./2013.

Na početku projekta svaki je učenik dobio svoje teme koje je trebao samostalno obraditi koristeći se svom literaturom koja mu je dostupna. Poslije pronalaženja objašnjenja pojmova, učenici su trebali objašnjenja samostalno zapisati i predati učitelju. Rad od svakog učenika je posebno pregledan, otklonjene su greške, poslije čega se moglo pristupiti zapisivanju pojmova u jedan dokument. Taj dio projekta je ujedno i ključan, budući da je objašnjenje pojmova koji su učenici zapisali moralo biti potkrijepljeno i slikama, formulama i primjerima.

Ovaj Matematički leksikon može prije svega poslužiti svim učenicima osnovne škole koji bi htjeli na brzi način ponoviti svoje znanje o gradivu matematike, bez da moraju listati udžbenike i stare bilježnice. Naglasak je bio na što jednostavnijem objašnjenju gradiva i pojmova, tako da bi snalaženje bilo što lakše. Svi učesnici ovog projekta se nadaju da će on poslužiti svojoj svrsi.

Ivica Švaljek

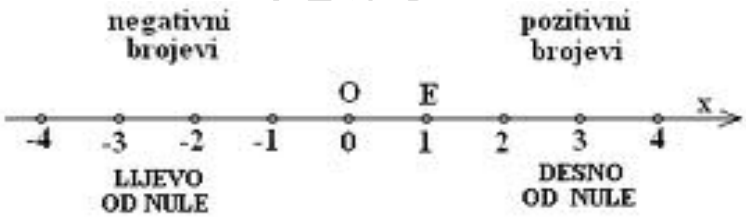
Cijeli brojevi

Gradivo o cijelim brojevima se nadovezuje na gradivo o skupu prirodnih brojeva. Skup prirodnih brojeva se sastoji od svih pozitivnih cijelih brojeva, dok se skup cijelih brojeva proširuje još sa brojem 0 i sa svim negativnim brojevima. Ako bi cijele brojeve promatrali na brojevnom pravcu, tada bi pozitivni cijeli brojevi bili desno od nule, a negativni cijeli brojevi lijevo od nule. **Skup cijelih brojeva** se dakle sastoji od svih negativnih cijelih brojeva, broja nule i svih pozitivnih cijelih brojeva i označavamo ga sa slovom **Z**.

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Cijeli brojevi koji se razlikuju samo u predznaku su suprotni brojevi. Dakle, primjerice brojevi -3 i 3 su suprotni brojevi jer imaju suprotan predznak, jedan je pozitivan a drugi negativan. Na brojevnom pravcu oni su smješteni simetrično u odnosu na nulu, odnosno imaju jednaku apsolutnu vrijednost.

Apsolutna vrijednost cijelog broja je udaljenost tog broja od nule na brojevnom pravcu.



Slika 1 - Smještaj cijelih brojeva na brojevnom pravcu

Kad vidimo kako su cijeli brojevi smješteni na brojevnom pravcu, možemo ih lako i uspoređivati. Opća pravila uspoređivanja cijelih brojeva su:

- **pozitivan broj je uvijek veći od negativnog broja**
- **pozitivan broj je uvijek veći od nule**
- **negativan broj je manji od nule**
- **od dva pozitivna broja veći je onaj koji je dalji od nule na brojevnom pravcu**
- **od dva negativna broja veći je onaj koji je bliži nuli na brojevnom pravcu**
- **gledano na brojevnom pravcu, od dva broja je veći onaj koji je više desno.**

Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

Ako zbrajamo cijele brojeve koji imaju isti predznak, to radimo tako da njihove apsolutne vrijednosti zbrojimo, a predznak prepišemo.

Primjer:

$$24 + 20 = 44$$
$$-15 + (-3) = -15 - 3 = -18$$

Ako zbrajamo dva cijela broja koji imaju različite apsolutne vrijednosti, to radimo tako da napišemo predznak onog broja koji ima veću apsolutnu vrijednost, a potom od veće apsolutne vrijednosti oduzmemo manju.

Primjer:

$$-24 + 20 = -(24 - 20) = -4$$
$$30 - 64 = -(64 - 30) = -34$$
$$-4 + 8 = +(8 - 4) = 4$$

Oduzimanje cijelih brojeva možemo promatrati kao dodavanje suprotnog broja.

Primjer:

45-(-5)=45+5=50

Kod zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva vrlo su bitni zadaci sa zagradama. Ukoliko imamo zadatke u kojima se pojavljuju zagrade, oni se rješavaju na takav način da prvo vidimo kakav je znak ispred zagrade, da li je to + ili -. Ukoliko je ispred zagrade +, zagrada se briše i predznaci brojeva koji su bili unutar zagrade se ne mijenjaju. Međutim, ukoliko je ispred zagrade -, onda kad se rješavamo zagrade moramo paziti i na to da se brojevima unutar

zagrade mijenja predznak. Ukoliko se u izrazu pojavi više zagrada, to rješavamo na takav način da se prvo rješavamo unutarnjih zagrada, a onda idemo prema vanjskima.

Primjer:

$$4 + (2 - 3) = 4 + 2 - 3 = 3$$
$$8 - (4 - 9) = 8 - 4 + 9 = 13$$

<u>Množenje i dijeljenje cijelih brojeva</u>

Množenje i dijeljenje cijelih brojeva je malo kompliciranije od množenja i dijeljenje cijelih brojeva zbog toga što moramo paziti na predznake brojeva koje množimo, budući da od toga ovisi kakav će biti rezultat množenja.

Cijeli brojevi se množe:

- **Ako množimo dva cijela broja, prvo moramo odlučiti kakav će predznak imati rezultat. Ukoliko oba cijela broja koja se množe imaju isti predznak, tada će rezultat biti pozitivan broj. Ukoliko množimo dva cijela broja koji imaju različite predznake, rezultat će biti negativan broj. Potom množimo apsolutne vrijednosti dvaju brojeva koje množimo. Isti postupak vrijedi i za dijeljenje cijelih brojeva.**

- **Ako množimo više cijelih brojeva, opet prvo moramo odlučiti kakav će predznak imati rezultat. Ako imamo neparan broj negativnih faktora, rezultat će biti negativan, a ako imamo paran broj negativnih faktora, rezultat će biti pozitivan.**

Primjer:

$$-2 \cdot (-5) = 10$$
$$-9 \cdot 2 = -18$$
$$-4 \cdot 2 \cdot (-3) = 24$$
$$-12 : 4 = -3$$

Četverokut

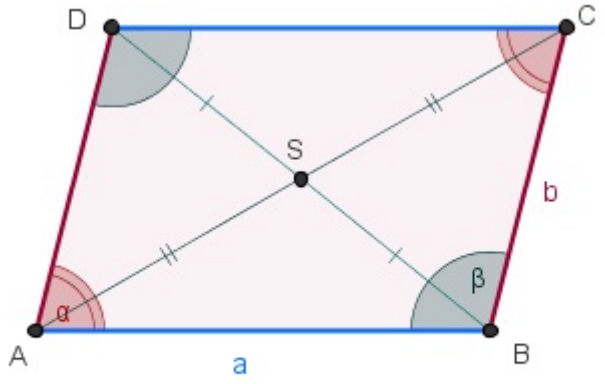
Četverokut možemo definirati kao dio ravnine koji je omeđen sa četiri dužine. Te dužine mogu imati zajedničke krajnje točke, ali ne smiju biti na istom pravcu.

Svaki četverokut, kao što mu i ime govori ima četiri vanjska i četiri unutarnja kuta. Kao pravila koja treba zapamtiti su i ona o zbroju unutarnjih i vanjskih kutova četverokuta:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° - zbroj\ unutarnjih\ kuteva\ četverokuta$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360 - zbroj\ vanjskih\ kuteva\ četverokuta$$
$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = 180°$$

<u>Paralelogram</u>

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne ili usporedne. Paralelogram također ima i dvije dijagonale koje se raspolavljaju. Uz to, nasuprotni kutovi su mu jednakih veličina.



Slika 2 - Paralelogram

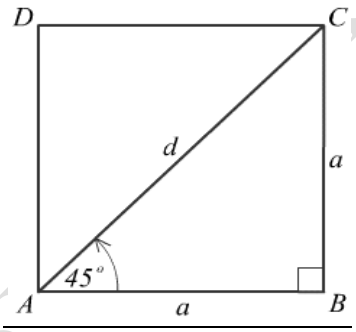
Formule:

$$Opseg\ paralelograma$$
$$O = 2a + 2b$$

$$Površina\ paralelograma$$
$$P = a \cdot v_a$$

<u>Kvadrat</u>

Kvadrat je paralelogram kojemu su sve četiri stranice jednakih duljina i susjedne stranice su okomite. Dijagonale kvadrata su isto tako jednakih duljina i međusobno se raspolavljaju pod pravim kutom.



Slika 3 - Kvadrat

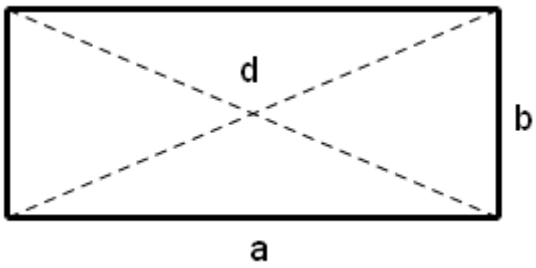
Formule:

$$Opseg\ kvadrata$$
$$O = 4a$$

$$Površina\ kvadrata$$
$$P = a \cdot a$$

Pravokutnik

Pravokutnik je paralelogram kojemu su nasuprotne stranice jednakih duljina, a susjedne stranice su međusobno okomite. Pravokutnik također ima dvije dijagonale međusobno jednakih duljina.



Slika 4 - Pravokutnik

Formule:

$$Opseg\ pravokutnika$$

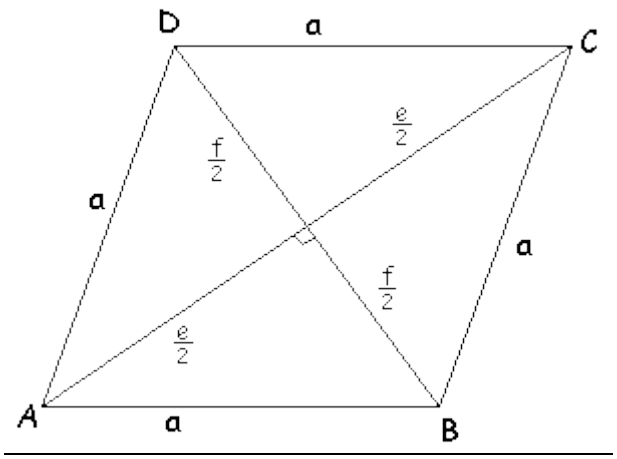
$$O = 2a + 2b$$

$$Površina\ pravokutnika$$

$$P = a \cdot b$$

Romb

Romb je paralelogram kojemu su sve stranice jednakih duljina i ima dvije dijagonale koje mu se raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom.



Slika 5 - Romb

Formule:

$$Opseg\ romba$$

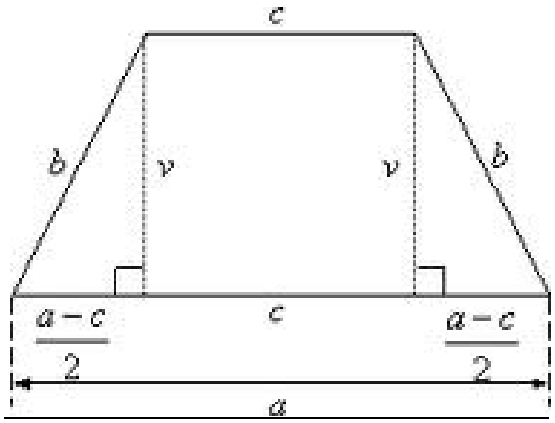
$$O = 4a$$

$$Površina\ romba$$

$$P = a \cdot v_a$$

<u>Trapez</u>

Trapez je četverokut koji ima točno dvije stranice paralelne, i te stranice se nazivaju osnovicama trapeza. Druge dvije stranice nazivamo krakovima trapeza. Mi ćemo detaljnije promatrati jednakokračni trapez, kod kojeg su krakovi jednakih duljina.



Slika 6 - Jednakokračni trapez

Formule:

$$Opseg\ jednakokračnog\ trapeza$$

$$O = a + 2b + c$$

$$Površina\ jednakokračnog\ trapeza$$

$$P = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Decimalni brojevi

Decimalni brojevi su brojevi koji nisu cijeli, tj. pišu se s točkom. Decimalni brojevi su svi brojevi koji su zapisani u decimalnom zapisu. Decimalni zapis je zapis koji se sastoji od cijelog ili dekadskog dijela, decimalne točke i decimala. Decimalni brojevi se mogu i uspoređivati i to na takav način, da ukoliko im je cijeli dio jednak, idemo gledati decimale, od prve decimale nadalje. Kada dođemo do mjesta gdje se decimale razlikuju, onaj decimalni broj kojemu je decimala veća je također po tome veći.

Zbrajanje decimalnih brojeva

Postupak zbrajanja decimalnih brojeva je isti kao i kod zbrajanja prirodnih brojeva, samo što još moramo paziti i na decimalnu točku.

1. decimalne brojeve koje želimo zbrojiti potpišemo u stupac jedan ispod drugoga , i to tako da decimalne točke namjestimo jednu ispod druge.

Primjer:

$$\begin{array}{r} 1.01 \\ \underline{+24.52} \\ 25.53 \end{array}$$

2. potom zbrajamo kao što smo zbrajali i prirodne brojeve
3. pritom ne zaboravimo u rezultatu napisati decimalnu točku točno ispod decimalnih točaka pribrojnika

Primjer:

$$\begin{array}{r} 1.01 \\ 24.52 \\ \underline{+\ 25.24} \\ 50.77 \end{array}$$

Oduzimanje decimalnih brojeva

1. decimalne brojeve koje moramo oduzeti potpišemo u stupac jedan ispod drugoga tako da decimalne točke budu točno jedna ispod druge

   Primjer:

   $$\begin{array}{r} 50.77 \\ -\ \underline{25.50} \\ 25\ .27 \end{array}$$

2. potom oduzmemo kao što smo oduzimali i prirodne brojeve
3. ukoliko brojevi koje oduzimamo nemaju jednak broj decimala iza zadnje decimale dopisujemo nula koliko nam je potrebno
4. ne zaboravimo u rezultatu napisati decimalnu točku točno ispod decimalnih točaka brojeva koje oduzimamo

Množenje decimalnih brojeva s dekadskim jedinicama

Decimalne brojeve množimo dekadskom jedinicom tako da decimalnu točku premjestimo udesno za onoliko mjesta koliko ta dekadska jedinica ima nula

Primjer:

$1.40 \cdot 100 = 140$

Dijeljenje decimalnih brojeva dekadskim jedinicama

Decimalne brojeve dijelimo dekadskom jedinicom tako da decimalnu točku premjestimo ulijevo za onoliko mjesta koliko ta dekadska jedinica ima nula

Primjer:

$29.3 : 10 = 2.93$

Množenje decimalnih brojeva cijelim brojevima

- umnožak - broj dobiven računskom operacijom množenja
- decimalni broj množimo prirodnim brojem kao da je i on prirodni broj, samo što u konačnom umnošku odbrojim zdesna nalijevo onoliko decimalnih mjesta koliko ih taj decimalni broj ima i tu stavimo točku.

Primjer:

$$\begin{array}{l} \underline{3.7 \cdot 3} \\ 11.1 \end{array}$$

Dijeljenje decimalnih brojeva cijelim brojevima

Decimalne brojeve dijelimo cijelim brojevima na isti način kao što dijelimo dva prirodna broja, samo što ovdje moramo paziti na decimalnu točku. Kada riješimo dijeljenje cijelog dijela iz djeljenika, u rješenju moramo staviti decimalnu točku i tek onda nastaviti s dijeljenjem decimala iz djeljenika.

Primjer:

$$12.5 : 5 = 2.5$$
$$2\ 5$$
$$0\ ost.$$

Djeljivost prirodnih brojeva

Kod prirodnih brojeva je veoma bitno da znamo kad je neki prirodni broj djeljiv sa nekim drugim prirodnim brojem. Da bi nam to bilo lakše, postoje neka opća pravila o djeljivosti prirodnih brojeva.

Kod djeljivost prirodnih brojeva vrlo važno je napomenuti kakvi su to prosti i složeni brojevi. **Prosti brojevi** su brojevi koji su djeljivi samo sa brojem 1 i sa sobom. To su, primjerice, brojevi 3,5,7,11,13,…

Složeni brojevi su svi brojevi koji imaju dva ili više djelitelja.

<u>Višekratnik i djelitelj</u>

Višekratnik nekog prirodnog broja je svaki prirodni broj koje djeljiv tim brojem. Najmanji višekratnik svakog prirodnog broja je on sam, dok najveći višekratnik ne postoji.

Primjer:

$$Višekratnici\ broja\ 3\ su - 3,6,9,12,15,18, \ldots$$

Djelitelji nekog prirodnog broja su svi brojevi sa kojima je taj prirodni broj djeljiv. Najmanji djelitelj svakog prirodnog broja je broj 1, dok je najveći djelitelj svakog prirodnog broja taj broj sam.

Primjer:

$$Djelitelji\ broja\ 24\ su - 1,2,3,4,6,8,12,24$$

Najmanji zajednički višekratnik dvaju brojeva je najmanji broj koji je djeljiv sa oba zadana prirodna broja. Ako su zadani brojevi prosti, onda je njihov najmanji zajednički višekratnik jednak njihovom umnošku.

Najveći zajednički djelitelj dvaju brojeva je najveći broj sa kojim su ta dva zadana prirodna broja djeljiva.

Djeljivost sa 2, 3, 5, 9 i 10

Pravila djeljivosti glase:

- **broj je djeljiv sa 2 ukoliko je paran, tj. ako završava sa 0, 2, 4, 6 ili 8,**
- **broj je djeljiv sa 3 ukoliko mu je zbroj znamenaka djeljiv sa 3,**
- **broj je djeljiv sa 5 ukoliko mu je zadnja znamenka 0 ili 5,**
- **broj je djeljiv sa 9 ukoliko mu je zbroj svih znamenaka djeljiv sa 9,**
- **broj je djeljiv sa 10 ukoliko mu je zadnja znamenka 0.**

Primjer:

BROJ	**Djeljiv sa 2**	**Djeljiv sa 3**	**Djeljiv sa 5**	**Djeljiv sa 9**	**Djeljiv sa 10**
244	DA	NE	NE	NE	NE
1324	DA	NE	NE	NE	NE
5499	NE	DA	NE	DA	NE
12345	NE	DA	DA	NE	NE
45600	DA	DA	DA	NE	DA
891999	NE	DA	NE	DA	NE
23418780	DA	DA	DA	NE	DA

Rastavljanje broja na proste faktore

Prirodne brojeve možemo rastaviti na proste faktore. To se radi na takav način da zadani prirodni broj dijelimo sa najmanjim prostim brojem sa kojim je djeljiv. Rezultat opet dijelimo sa najmanjim prostim brojem sa kojim je djeljiv, i tako sve dok ne dođemo do 1. Zadani prirodni broj tada zapišemo kao umnožak prostih brojeva sa kojima smo dijelili.

Primjer:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Geometrijska tijela

Geometrijska tijela su gradivo koje se obrađuje u većem dijelu 8. razreda. Spominje se kocka, kvadar, prizme, piramide, valjak i stožac. U nastavku će detaljnije biti opisano svako pojedino geometrijsko tijelo.

Prizme

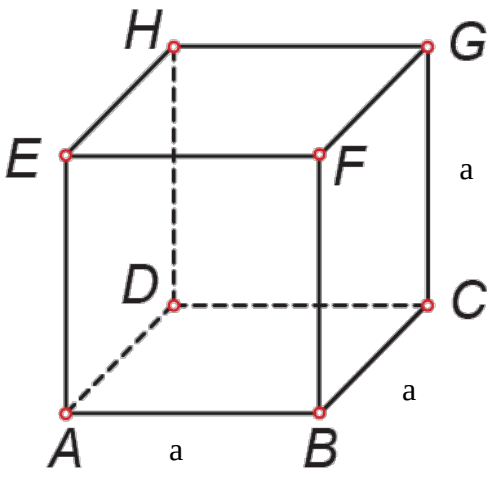
Prizme su uglata geometrijska tijela koja su omeđena dvama usporednim sukladnim mnogokutima koje zovemo baze i pobočkama koje su paralelogrami.

Osnovni pojmovi kod prizmi:

a – osnovni brid
a,b,c – bridovi
h – visina prizme
O – oplošje prizme
V – obujam prizme

Kocka

Kocka je geometrijsko tijelo (uspravna prizma) koje je omeđeno sa šest jednakih ploha, a te plohe su međusobno sukladni kvadrati. Ima osam vrhova i dvanaest bridova jednakih duljina. Kocka također ima i plošnu dijagonalu (koja spaja dva suprotna vrha iste plohe) i prostornu dijagonalu (koja spaja dva vrha kocke koji ne pripadaju istoj plohi.



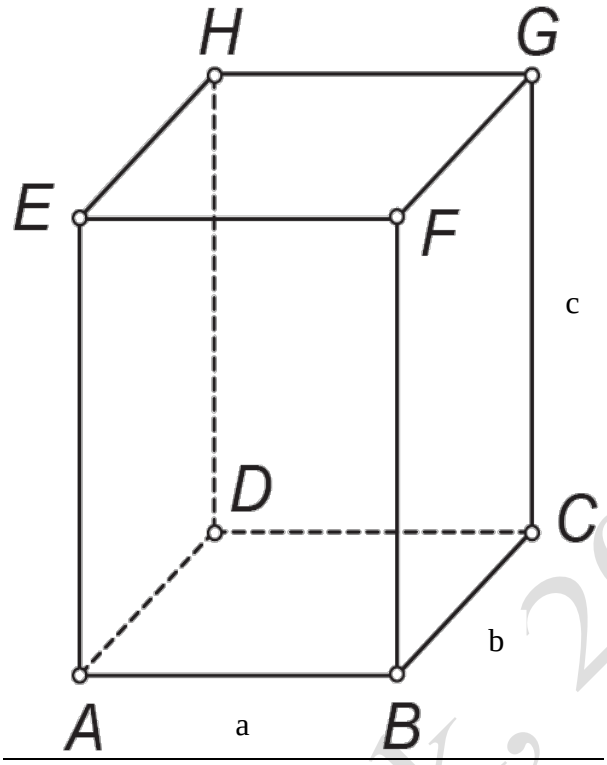
Slika 7 - Kocka

Formule:

Duljina plošne dijagonale –	$d = a\sqrt{2}$
Duljina prostorne dijagonale -	$D = a\sqrt{3}$
Oplošje kocke -	$O = 6a^2$
Obujam kocke -	$V = a^3$

Kvadar

Kvadar je geometrijsko tijelo (uspravna prizma) čije su plohe šest pravokutnika. Također, kao i kocka, ima osam vrhova i dvanaest bridova, ali kod kvadra bridovi nisu jednakih duljina. Zbog tih različitih duljina bridova kvadar ima čak tri različite duljine plošnih dijagonala. Isto tako, kao i kocka, ima i prostornu dijagonalu.



Slika 8 - Kvadar

Formule:

Plošne dijagonale - $d_1 = a^2 + b^2$

$d_2 = b^2 + c^2$

$d_3 = a^2 + c^2$

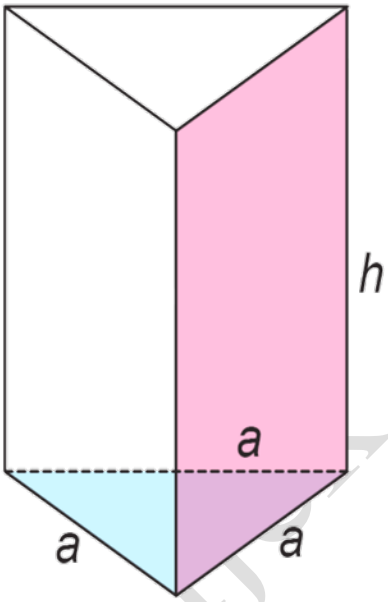
Prostorna dijagonala - $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Oplošje kvadra - $O = 2(ab + ac + bc)$

Obujam kvadra - $V = abc$

Pravilna trostrana prizma

Pravilna trostrana prizma je uspravna prizma kojoj su baze jednakostranični trokuti, a pobočke sukladni paralelogrami.



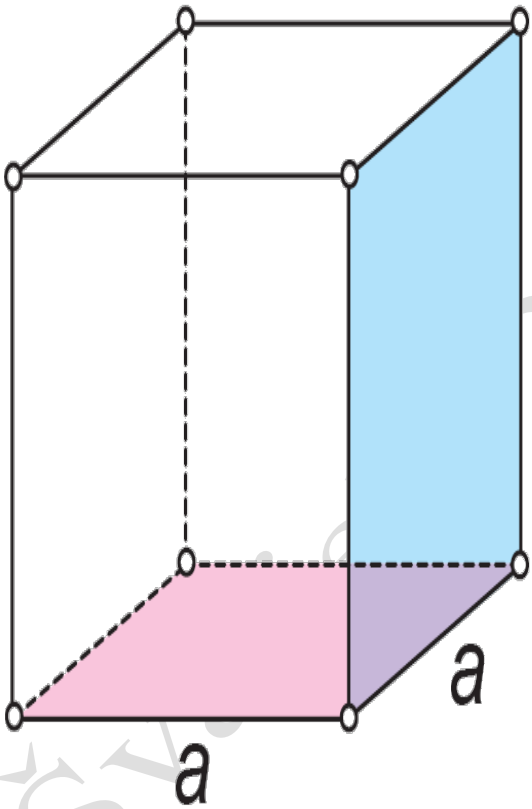
Slika 9 - Pravilna trostrana prizma

Formule:

Oplošje -	$O = 2B + P$
Površina baze -	$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Površina pobočja -	P=3ah
Obujam -	$V = B \cdot h$

Pravilna četverostrana prizma

Pravilna četverostrana prizma je uspravna prizma kojoj su baze kvadrati, a pobočke sukladni paralelogrami. Pravilna četverostrana prizma se često naziva i kvadratna prizma.



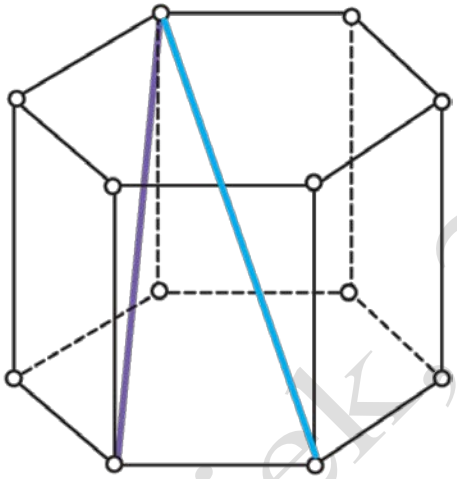
Slika 10 - Pravilna četverostrana prizma

Formule:

Oplošje -	$O = 2B + P$
Površina baze -	$B = a^2$
Površina pobočja -	P=4ah
Obujam -	$V = B \cdot h$

Pravilna šesterostrana prizma

Pravilna šesterostrana prizma je uspravna prizma kojoj je baza pravilni šesterokut, a pobočke sukladni paralelogrami.



Slika 11 - Pravilna šesterostrana prizma

Formule:

Oplošje -	$O = 2B + P$
Površina baze -	$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Površina pobočja -	P=6ah
Obujam -	$V = B \cdot h$

Piramide

Piramide su uglata geometrijska tijela koja su omeđena s jednim mnogokutom kojeg zovemo baza i pobočjem koje čine trokuti. Bazu i pobočke nazivamo stranama piramide.

Osnovni pojmovi kod piramida:

a – osnovni brid

b – duljina pobočnog brida

h – visina piramide

v – visina baze (trokuta)

h_1- duljina pobočke

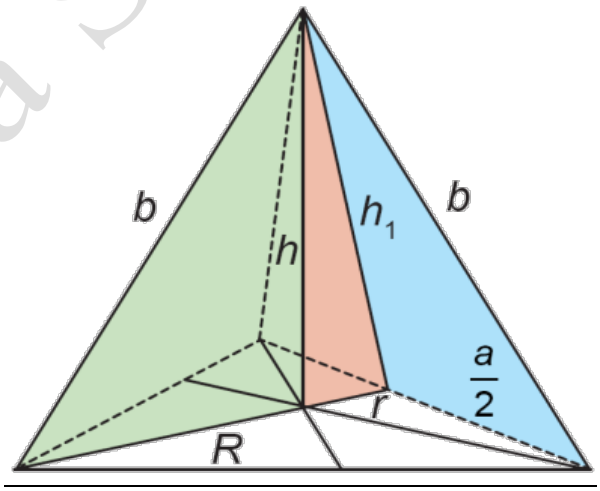
d- duljina dijagonale baze

O – oplošje piramide

V – obujam piramide

Pravilna trostrana piramida

Pravilna trostrana piramida je piramida kojoj je baza jednakostranični trokut, a pobočke sukladni jednakokračni trokuti.



Slika 12 - Pravilna trostrana piramida

Formule:

Oplošje - $O = B + P$

Površina baze - $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Površina pobočja - $P = 3\frac{ah_1}{2}$

Obujam - $V = \frac{B \cdot h}{3}$

Duljina polumjera bazi

opisane kružnice - $R = \frac{2}{3}v$

Duljina polumjera bazi

upisane kružnice - $r = \frac{1}{3}v$

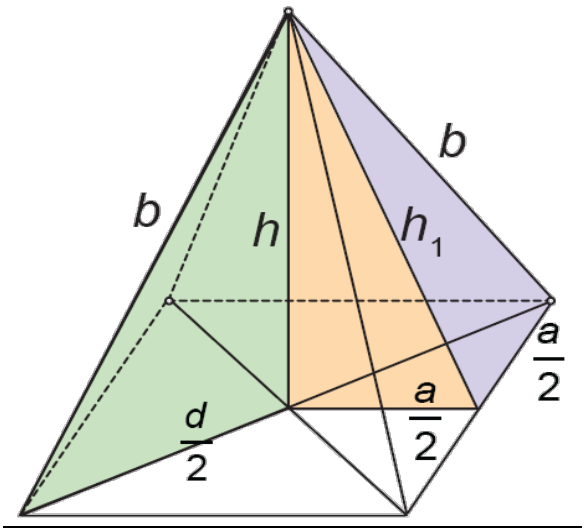
Primjena Pitagorinog poučka - $b^2 = R^2 + h^2$

$$h_1{}^2 = r^2 + h^2$$

$$b^2 = h_1{}^2 + (\frac{a}{2})^2$$

Pravilna četverostrana piramida

Pravilna četverostrana piramida je piramida kojoj je baza kvadrat, a pobočke sukladni jednakokračni trokuti.



Slika 13 - Pravilna četverostrana piramida

Formule:

Oplošje - $O = B + P$

Površina baze - $B = a^2$

Površina pobočja - $P = 4\frac{ah_1}{2}$

Obujam - $V = \frac{B \cdot h}{3}$

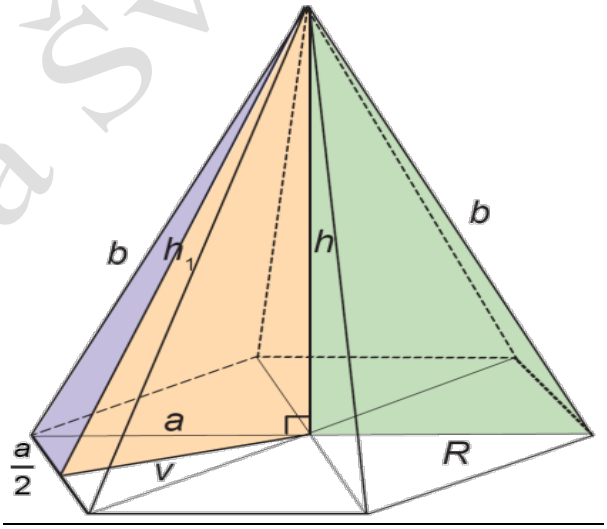
Primjena Pitagorinog poučka - $b^2 = h^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$

$$h_1{}^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$b^2 = h_1{}^2 + (\frac{a}{2})^2$$

Pravilna šesterostrana piramida

Pravilna šesterostrana piramida je piramida kojoj je baza pravilni šesterokut, a pobočke sukladni jednakokračni trokuti.



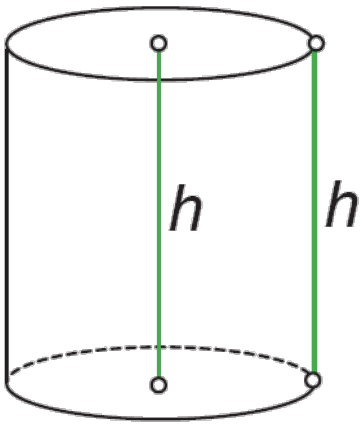
Slika 14 - Pravilna šesterostrana piramida

Formule:

Oplošje -	$O = B + P$
Površina baze -	$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Površina pobočja -	$P = 6\frac{ah_1}{2}$
Obujam -	$V = \frac{B \cdot h}{3}$
Duljina polumjera bazi opisane kružnice -	$R = a$
Duljina polumjera bazi upisane kružnice -	$r = v$
Primjena Pitagorinog poučka -	$b^2 = h^2 + a^2$
	${h_1}^2 = r^2 + h^2$
	$b^2 = {h_1}^2 + (\frac{a}{2})^2$

<u>Valjak</u>

Valjak je oblo geometrijsko tijelo koje ima dvije baze koje su krugovi i plašt koji je pravokutnik.



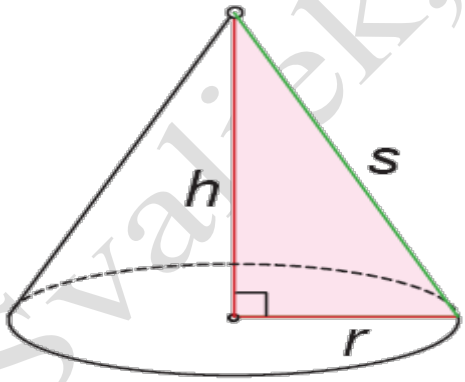
Slika 15 - Valjak

Formule:

Oplošje valjka -	$O = 2B + P$
Obujam valjka -	$V = B \cdot h$
Površina baze -	$B = r^2\pi$
Površina plašta -	$P = 2r\pi \cdot h$
Opseg baze valjka -	$o_b = 2r\pi$

<u>Stožac</u>

Stožac je oblo geometrijsko tijelo koje ima jednu bazu koja je krug i plašt koji je kružni isječak.



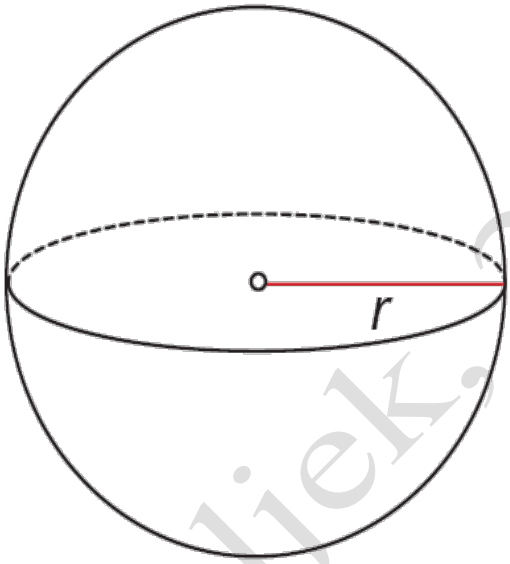
Slika 16 - Stožac

Formule:

Oplošje stožca -	$O = B + P$
Obujam stožca -	$V = \frac{B \cdot h}{3}$
Površina baze -	$B = r^2\pi$
Površina plašta -	$P = r\pi s$
Opseg baze valjka -	$o_b = 2r\pi$
Izvodnica stožca -	$s^2 = h^2 + r^2$

Kugla i sfera

Sfera ili kuglina ploha je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od neke točke koja se zove središte sfere. Kugla je dio prostora omeđen sa sferom, a uključuje i sve točke sfere.



Slika 17 - Kugla i sfera

Formule:

Oplošje kugle - $O = 4r^2\pi$

Obujam kugle - $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

Jednostavni kamatni račun

Pomoću **jednostavnog kamatnog računa** možemo izračunati koliko bi kamata dobili ukoliko bi uložili nekakvu sumu novaca u banku, ili koliko bismo kamata morali platiti ako bismo uzeli nekakav kredit. Formula jednostavnog kamatnog računa glasi:

$$k = s \cdot g \cdot v$$
$$k - kamata$$
$$s - kamatna\ stopa$$
$$g - glavnica$$
$$v - vrijeme\ u\ godinama$$

Primjer:

$s = 6\% = \frac{6}{100}$

$g = 1500\ kn$

$\underline{v = 1\ god}$

$k = ?$

$k = s \cdot g \cdot v$

$k = \frac{6}{100} \cdot 1500 \cdot 1$

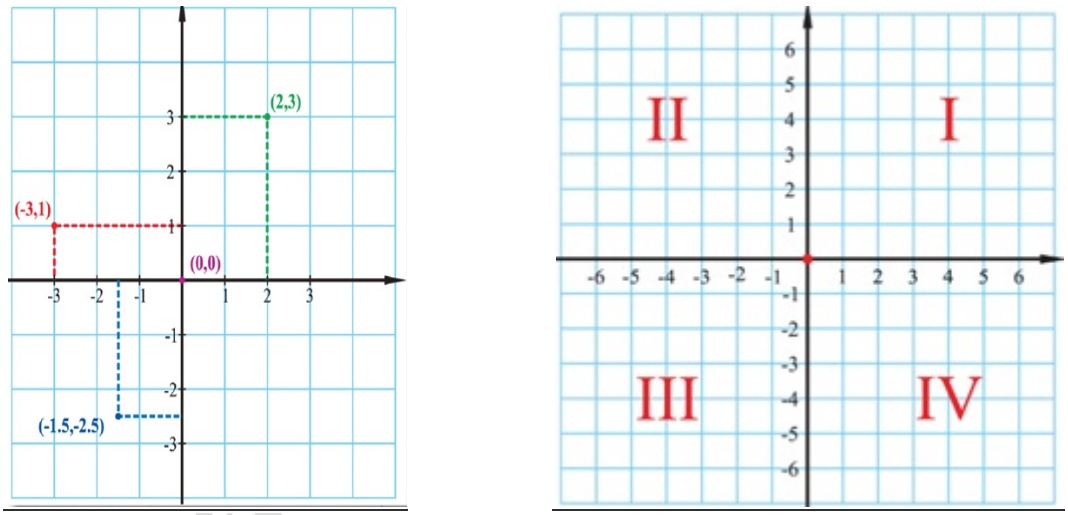
$k = 90kn$

Koordinatni sustav u ravnini

Uređeni par brojeva jest par brojeva kod kojeg je određeno koji je broj na prvom,a koji na drugom mjestu. Uređeni par brojeva x i y označavamo oznakom (x,y). Broj x nazivamo prvim članom, a broj y drugim članom uređenog para (x,y).

Uspravna os (os y) se zove **ordinatna os.**
Vodoravna os (os x) se zove **apscisna os.**
A(x,y) – uređeni par (x,y) **koordinata je točke A.**

Koordinatne osi dijele ravninu na 4 dijela koje nazivamo kvadrantima. Točka koja leži na x-osi ima y-koordinatu jednaku 0, dok točka koja leži na y-osi ima x-koordinatu jednaku 0.



Slika 18 - Koordinatni sustav u ravnini

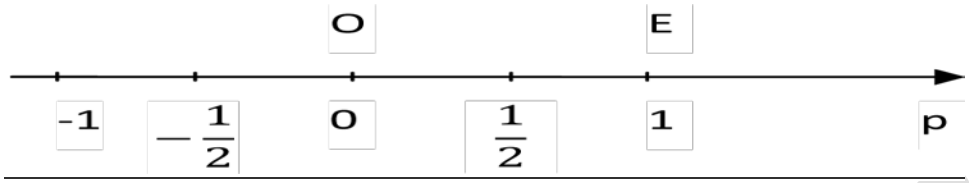
Koordinatni sustav na pravcu

Svakom racionalnom broju x pridružena je točno jedna točka na brojevnom pravcu (koordinatnom sustavu na pravcu) koju označavamo T(x).

Broj x nazivamo **koordinatom točke T(x).** Ishodište na koordinatnom sustavu na pravcu je 0. Ako na pravcu *p* odredimo ishodište 0 i jediničnu točku E, uveli smo koordinatni sustav na pravac p kojem je dužina |OE| jedinična dužina.

Pravac na kojem je određena jedinična dužina naziva se **brojevni pravac.**

Brojevima iz skupa N, No, Z i Q mogu se pridruživati točke brojevnog pravca. S obzirom da se brojevi promatraju kao koordinate točaka na pravcu, za pravac *p* uvodi se naziv koordinatni pravac.



Slika 19 - Koordinatni sustav na pravcu

Korjenovanje racionalnih brojeva (drugi korijen)

Korjenovanje racionalnih brojeva je operacija suprotna od kvadriranja. Znači, tražimo broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj koji se nalazi pod korijenom.

$$\sqrt{9} = 3, jer\ je\ 3 \cdot 3 = 9$$

$$\sqrt{144} = 12, jer\ je\ 12 \cdot 12 = 144$$

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}, jer\ je\ \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

Formule bitne za korjenovanje:

$5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$ - koeficijente ispred korijena brojimo, a korijen prepišemo

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ - kada imamo korijen umnoška, možemo svaki faktor korjenovati posebno, a onda ih pomnožiti. Ovo vrijedi i u suprotnom smjeru.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ - kod korijena količnika možemo posebno korjenovati djeljenika i djelitelja, pa ih potom podijeliti. Ovo vrijedi i u suprotnom smjeru.

$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ - ako pod korijenom imamo umnožak dvaju brojeva od kojih jednoga možemo korjenovati, a drugoga ne, onog koji se može korjenovati korjenujemo, a drugoga ostavimo pod korijenom. Ovaj postupak se zove djelomično korjenovanje.

Racionalizacija nazivnika

Ukoliko imamo nekakav razlomak kod kojega se u nazivniku nalazi korijen, mi se moramo toga korijena riješiti. **Racionalizacija nazivnika** je postupak pomoću kojeg se rješavamo korijena iz nazivnika. To radimo na takav način da proširimo nazivnik tim korijenom koji je u nazivniku, tj. da brojnik i nazivnik toga razlomka pomnožimo tim korijenom.

Primjeri:

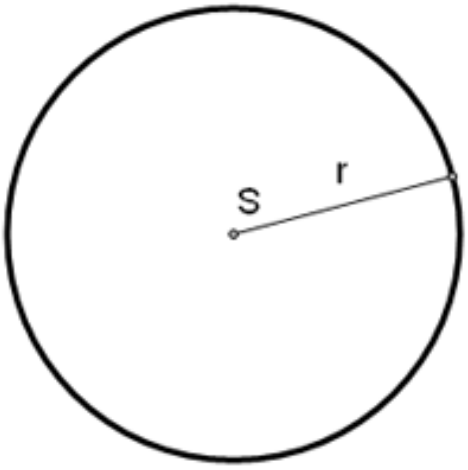
$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{25-9} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{16} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{8}$$

Kružnica i krug

Kružnica je skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljenje od neke točke koja se naziva središte kružnice.

Krug je dio ravnine omeđen kružnicom, a sadrži i sve točke kružnice.



Slika 20 - Kružnica

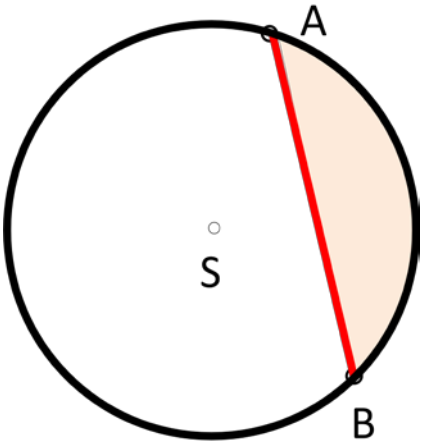
Osnovni pojmovi kod kruga i kružnice

$$S - \textit{središte kružnice}$$
$$r - \textit{radijus ili polumjer kružnice}$$
$$d - \textit{promjer ili dijametar kružnice } (d = 2r)$$

Tetiva kružnice – ukoliko na kružnici označimo dvije točke i njih spojimo, dužina koja spaja te dvije točke naziva se tetiva kružnice. Najdulja tetiva kružnice je promjer ili dijametar. Tetiva dijeli kružnicu na dva **kružna odsječka.** Ukoliko je u pitanju promjer, on dijeli kružnicu na dva **polukruga.**

Kružni luk – dio kružnice koji je omeđen sa dvije točke na kružnici. Duljinu kružnog luka možemo izračunati po formuli:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180°}$$

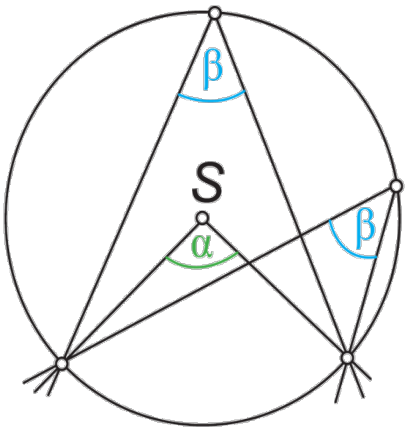


Slika 21 - Tetiva i kružni luk

Slika xx. Tetiva i kružni luk

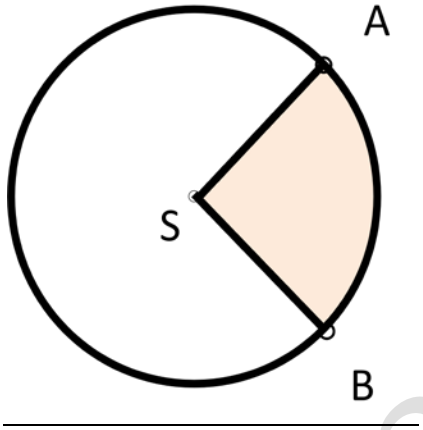
Središnji i obodni kut u kružnici – središnji kut nad kružnim lukom je onaj kut kojemu je vrh u središtu kružnice, a krakovi prolaze točkama koje omeđuju kružni luk. Obodni kut je onaj kut kojemu se vrh nalazi negdje na kružnici, a krakovi mu prolaze točkama tog istog kružnog luka. Središnji i obodni kut imaju odnos:

$$\alpha = 2\beta, gdje\ je:$$
$$\alpha - veličina\ središnjeg\ kuta$$
$$\beta - veličina\ obodnog\ kuta$$



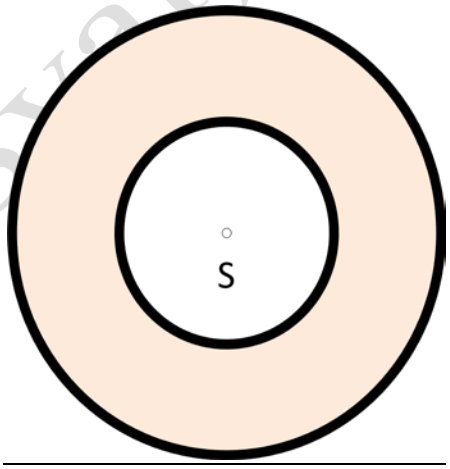
Slika 22 - Središnji i obodni kut

Kružni isječak – kružni isječak je dio kruga koji je omeđen sa dvama polumjerima i njima pripadajućim kružnim lukom. Dva polumjera dijele krug na dva kružna isječka.



Slika 23 - Kružni isječak

Kružni vijenac – dio kruga između dvije kružnice koje imaju isto središte, a različite polumjere.



Slika 24 - Kružni vijenac

Tangenta kružnice – pravac koji dira kružnicu u samo jednoj točki.

Sekanta kružnice – pravac koji siječe kružnicu u dvije točke.

Opseg i površina kruga se računaju po formulama:

$$o = 2r\pi$$

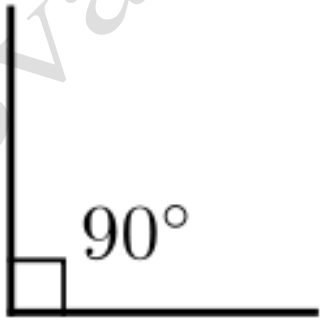
$$P = r^2\pi$$

Kutovi

Ako uzmemo da imamo dva polupravca koji imaju isti vrh, dio ravnine koji je omeđen sa ta dva polupravca se naziva **kut**. Budući da ti polupravci mogu biti u raznim položajima, tako možemo da razlikujemo više vrsta kutova. Veličine kutova se mjere u **stupnjevima.**

Vrste kutova

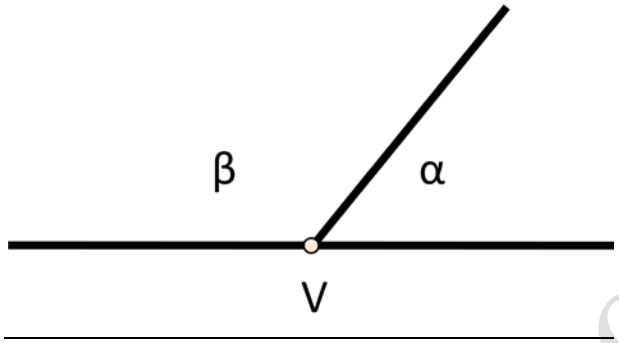
Šiljasti kut – kut koji je manji od pravog kuta, veličine između 0º i 90º
Pravi kut – kut kojemu su krakovi međusobno okomiti, veličine 90º
Tupi kut – kut koji je veći od pravog, a manji od ispruženog kuta, veličine između 90º i 180º
Ispruženi kut – kut kojemu se krakovi nalaze na istom pravcu, veličine 180º
Izbočeni kut – kut koji je veći od ispruženog kuta, a manji od punog kuta, veličine između 180º i 360º
Puni kut – kut kojemu se kraci podudaraju, veličine 360º.



Slika 25 - Pravi kut

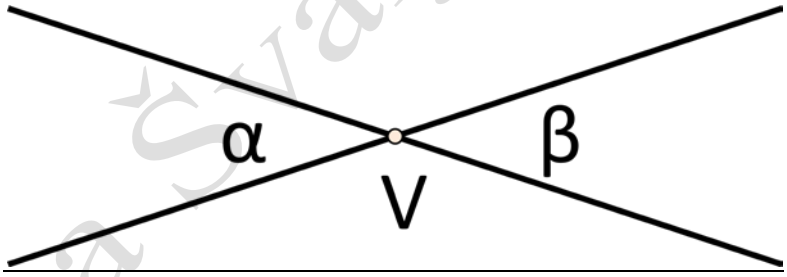
Sukuti i vršni kutovi

Susjedni kutovi ili sukuti su kutovi koji imaju jedan zajednički krak, a preostala su dva kraka različiti polupravci istoga pravca. Dva sukuta zajedno imaju 180º ($\alpha + \beta = 180°$).



Slika 26 - Sukut

Vršni kutovi su takva dva kuta koji imaju zajednički vrh, a kraci jednoga leže u produžetcima krakova drugog. Dva vršna kuta imaju jednake veličine ($\alpha = \beta$).



Slika 27 - Vršni kutovi

Kvadriranje racionalnih brojeva

Kvadriranje racionalnih brojeva se najjednostavnije može objasniti kao množenje racionalnog broja samog sa sobom. Dakle, za neki racionalni broj x vrijedi da je:

$$x \cdot x = x^2.$$

Kvadrat broja 0 jednak je nuli.

Primjeri:

$5^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ - kada je minus unutar zagrade, kvadrira se cijeli broj, uključujući i minus

$-5^2 = -25$ - u ovom primjeru, kada je minus izvan zagrade, kvadrira se samo broj, dok se minus prepisuje

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ - kod kvadriranja razlomka kvadrira se posebno brojnik i posebno nazivnik

$\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$ - ako nema zagrade kod kvadriranja razlomaka, treba paziti gdje se nalazi znak kvadrata, da li iznad brojnika ili nazivnika, jer onda kvadriramo samo taj broj

$(5x)^2 = 25x^2$ - kod ovakvog izraza, mora se kvadrirati i broj i varijabla

$4x^2 + 8x^2 = 12x^2$ - cijeli brojevi se zbroje, a varijabla prepiše.

Kvadrat binoma

Kvadrat binoma (dvojnog izraza) se računa po formuli:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Primjeri:

$$(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 =$$
$$= 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$(5-5x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5x + (5x)^2 =$$
$$= 25 + 50x + 25x^2$$

Razlika kvadrata

Razlika kvadrata se računa po formuli:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Primjer:

$$(3+2y) \cdot (3-2y) = 3^2 - (2y)^2 =$$
$$= 9 - 4y^2$$

Linearna funkcija

Linearna funkcija ima opći oblik $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, gdje su a i b parametri linearne funkcije, a x je argument funkcije. Linearnu funkciju možemo pisati i kao $\boldsymbol{y = ax + b}$. Za svaku linearnu funkciju možemo nacrtati njezin graf u koordinatnom sustavu u ravnini.

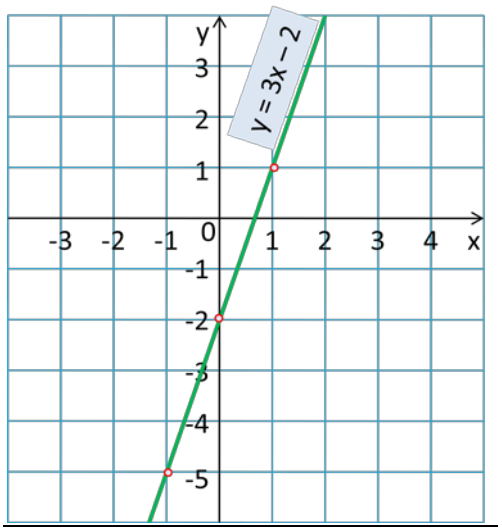
Primjer:

Nacrtaj graf linearne funkcije $f(x) = 3x - 2$

1. Moramo napraviti tablicu u kojoj ćemo izračunati vrijednosti funkcije za argumente x koje si sami zadamo. Za crtanje grafa linearne funkcije potrebne su nam najmanje dvije točke.

x	f(x)
0	-2
1	1
-1	-5

2. Nacrtamo koordinatni sustav u ravnini i u njega ucrtamo točke koje imaju koordinate zapisane u tablici.
3. Kroz te točke provučemo pravac i iznad njega napišemo jednadžbu pravca u obliku $y = 3x - 2$.



Slika 28 - Graf funkcije f(x)=3x-2

Linearna funkcija može biti **rastuća ili padajuća**, a to ovisi o **parametru a** koji se zove koeficijent smjera. Ukoliko je on pozitivan funkcija je rastuća, a ukoliko je on negativan funkcija je padajuća. Ako koeficijent smjera ima vrijednost 0 graf funkcije je pravac koji je paralelan s x-osi, tj. možemo reći da je funkcija konstantna.

Parametar b se naziva odsječak na y-osi i on nam govori u kojoj točki pravac siječe y-os.

Pomoću linearne funkcije mogu se rješavati i sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. To se radi na takav način da obje jednadžbe izrazimo u obliku $\boldsymbol{y = ax + b}$, potom nacrtamo njihove grafove i sjecište dvaju pravaca je rješenje sustava.

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom je svaka jednadžba koja se može svesti na jednadžbu oblika $ax=b$ ($a \neq 0$), gdje su a i b poznati brojevi. Kod rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom bitno je da:

- NEPOZNANICE UVIJEK STAVLJAMO NA JEDNU STRANU, A BROJEVE NA DRUGU.
- KADA "PREBACUJEMO" BROJEVE ILI NEPOZNANICE PREKO ZNAKA JEDNAKOSTI MIJENJA IM SE PREDZNAK.

Primjer**:**

$$6x=12$$

$\downarrow \quad \downarrow$

nepoznanica poznati broj

Kod rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, x mora stajati sam. Da bismo se riješili broja ispred nepoznanice (x) moramo cijelu jednadžbu podijeliti s tim brojem.

$$6x=12 \ /:6$$
$$x=2$$

Provjera: $6 \cdot 2=12$

$12=12$

Rješenje ove jednadžbe je 2.

<u>Ekvivalentne jednadžbe</u>

Dvije jednadžbe su **ekvivalentne** ako su sva rješenja jedne jednadžbe ujedno i rješenja druge jednadžbe.

Primjer:

Jednadžba a: $4x + 1 = 5$

$4x=5-1$

$4x=4 \ /:4$

$x=1$

Jednadžba b: $4x=4$

$4x=4/:4$

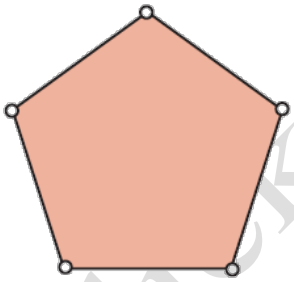
$x=1$

Rješenje jednadžbe "a" je 1 i rješenje jednadžbe "b" je 1. Imaju ista rješenja pa za njih možemo reći da su ekvivalentne.

Mnogokuti

Najlakši način definiranja mnogokuta je da su to geometrijski likovi koji imaju više kutova. Dakle, ako nanošenjem dužine na dužinu opet stignemo u početnu točku i omeđimo neki dio prostora, taj dio prostora se naziva **mnogokut.**

Svaki mnogokut ima **stranice, vrhove i kutove**. U osnovnoj školi se detaljnije obrađuju samo pravilni mnogokuti, tj. mnogokuti koji imaju sve stranice jednake duljine i sve kutove jednake. Primjeri za to su, primjerice, jednakostranični trokut, kvadrat, pravilni peterokut… Ako uzmemo da svaki pravilni mnogokut ima n stranica ili kutova, taj mnogokut zovemo **pravilni $\boldsymbol{n - terokut}$**.



Slika 29 - Pravilni peterokut

<u>Pojmovi bitni za mnogokut</u>

$$n - broj\ stranica\ ili\ kuteva\ mnogokuta$$

$$d_n - \ broj\ dijagonala\ iz\ jednog\ vrha\ mnogokuta$$

$$d_n = n - 3$$

$$D_n - \ ukupan\ broj\ dijagonala\ u\ mnogokutu$$

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$K_n - \ zbroj\ veličina\ unutarnjih\ kuteva\ mnogokuta$$

$$K_n = (n-2) \cdot 180°$$

$$\beta_n - \ veličina\ unutarnjeg\ kuta\ pravilnog\ n - terokuta$$

$$\beta_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

$$\beta_{n'} - \ veličina\ vanjskog\ kuta\ pravilnog\ n - terokuta$$

$$\beta_{n'} = \frac{360°}{n}$$

$$o - opseg\ pravilnog\ mnogokuta$$

$$o = n \cdot a$$

$$P - površina\ pravilnog\ n - terokuta$$

$$P = n \cdot \frac{a \cdot v}{2}, gdje\ je\ v\ visina\ karakterističnog\ trokuta\ mnogokuta$$

Omjer i proporcija

Količnik dvaju brojeva *a i b, b ≠ 0,* zovemo još i **omjer tih brojeva.** Omjer brojeva a i b se piše kao

$$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b},$$

a čita se **"a naprema b"**, gdje je a prvi član omjera, a b drugi član omjera. Omjer možemo pisati i kao razlomak, u obliku $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$**.**

Kao što će biti obrađeno i kod proširivanja razlomaka, vrijednost omjera se ne mijenja ukoliko i prvi i drugi član omjera pomnožimo ili podijelimo sa istim brojem.

Proporcija ili razmjer je jednakost omjera. Ukoliko imamo dva omjera koji su jednako to pišemo kao:

$$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}:\boldsymbol{d},$$

a čita se kao "a naprema b odnosi se kao c naprema d". Umnožak dva vanjska člana proporcije (a i d) je jednak umnošku dvaju unutarnjih članova proporcije (b i c).

<u>Proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine</u>

Da bi mogli obrađivati gradivo o proporcionalnim i obrnuto proporcionalnim veličinama, moramo znati što su to omjer i proporcija.

Proporcionalne veličine su takve dvije veličine koje ovise jedna o drugoj na način da koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta poveća (smanji) i druga veličina. Primjerice, to se najbolje može vidjeti kad prolazimo nekakav put, ukoliko putujemo više vremena naravno da posljedično prijeđemo i veću udaljenost ili kada kupujemo nekakvu robu u trgovini.

Primjer:

Cijena dvije čokolade u trgovini je 10 kuna. Kolika bi bila cijena 5 takvih čokolada?

Broj čokolada	Cijena
2	10 kn
5	x

$$\mathbf{2}:5 = 10:x$$
$$2 \cdot x = 5 \cdot 10$$
$$2x = 50$$
$$x = 25$$

Cijena 5 takvih čokolada bi bila 25 kn.

Obrnuto proporcionalne veličine su takve dvije veličine koje ovise jedna o drugoj na način da koliko se puta poveća jedna veličina, toliko se puta smanji druga veličina. Najbolji primjer za to su nekakvi radovi, ukoliko imamo više radnika za obavljanje nekakvog posla, trebat će nam manje vremena za završetak.

Primjer:

10 radnika obavi neki posao za 40 dana. Za koliko dana bi taj isti posao obavilo 20 radnika?

Broj radnika	Dani
10	40
20	x

$$10:20 = x:40$$
$$10 \cdot 40 = 20 \cdot x$$
$$400 = 20x$$
$$x = 20$$

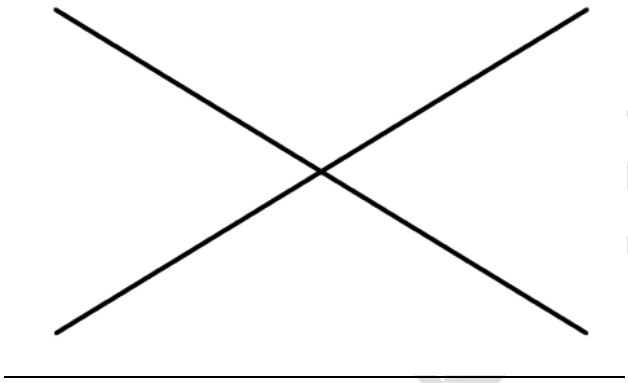
Obavili bi taj posao za 20 dana.

Kod rješavanja zadataka sa proporcionalnošću i obrnutom proporcionalnošću, prvo što je veoma bitno je postavljanje strelica. Najbolje ih je postavljati od manje vrijednosti prema većoj. Tada se proporcija postavlja na takav način da se svaki omjer piše od početka strelice prema kraju strelice. Potom množimo vanjske članove proporcije i izjednačujemo rezultat sa množenjem unutarnjih članova proporcije, te dobijemo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom čije je rješenje ujedno i rješenje zadatka.

Osnovni geometrijski pojmovi

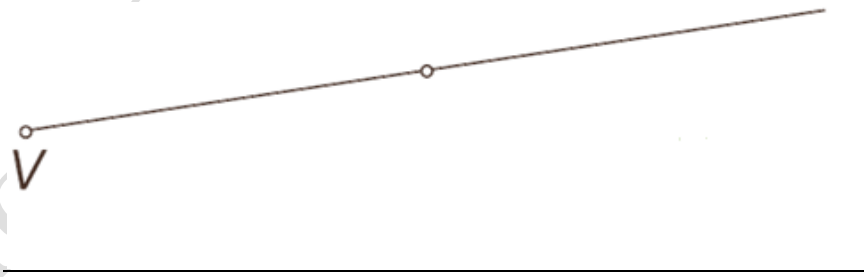
Ravnina je neomeđena ravna ploha. Najmanji dio ravnine je **točka.**

Pravac je ravna neomeđena crta. Za crtanje pravca potrebne su nam najmanje dvije točke. Pravce označujemo sa malim tiskanim slovima. Pravci mogu biti ukršteni, okomiti i paralelni.



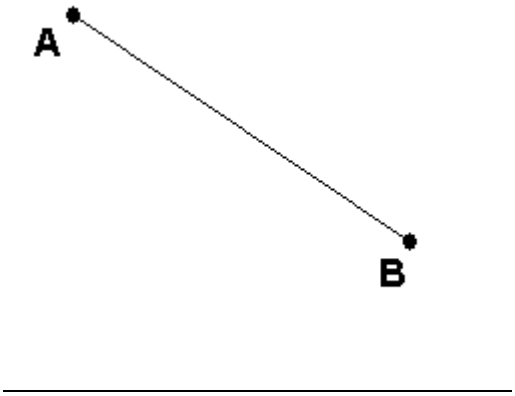
Slika 30 - Dva ukrštena pravca

Polupravac je ravna crta koja je omeđena samo s jedne strane.



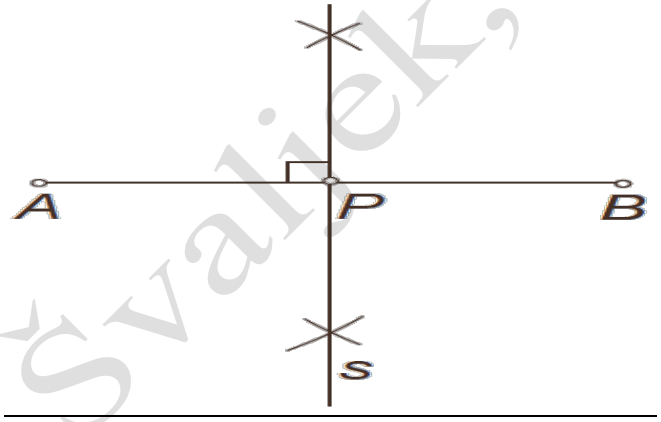
Slika 31 - Polupravac

Dužina je omeđena ravna crta. Točke kojima je crta omeđena nazivaju se krajnje točke dužine. Svaka dužina ima svoju duljinu.



Slika 32 - Dužina

Simetrala dužine je pravac koji dijeli dužinu na pola i okomit je na nju.



Slika 33 - Simetrala dužine

Pitagorin poučak

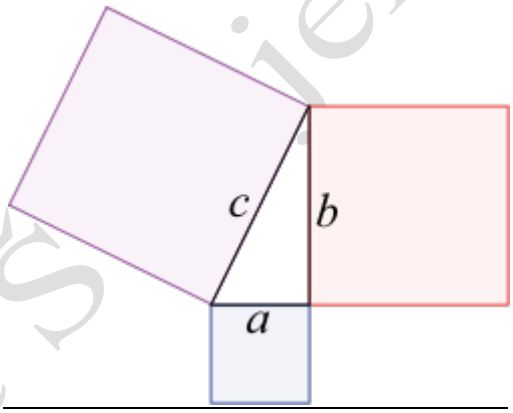
Pitagorin poučak odnosi se na pravokutni trokut, a dobio je ime po matematičaru i filozofu Pitagori. Pitagorin poučak glasi: **Kvadrat nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednak je zbroju kvadrata nad dvije katete.** Može se i reći da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom.

a, b – katete

c – hipotenuza

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

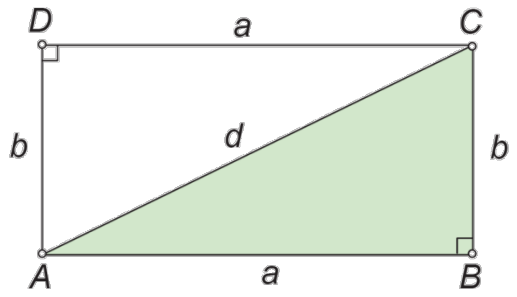
Stranice a,b i c, ukoliko zadovoljavaju prije postavljeni Pitagorin poučak nazivaju se Pitagorine trojke.



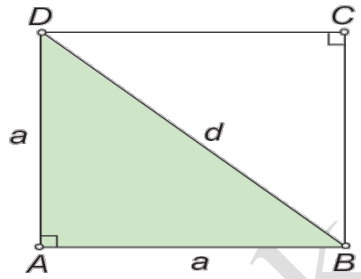
Slika 34 - Pitagorin poučak

Primjena Pitagorina poučka na pravokutnik i kvadrat

Kod primjene Pitagorinog poučka na kvadrat i pravokutnik moramo se podsjetiti da svaki kvadrat i pravokutnik uz stranice a i b imaju i dijagonalu d. Da bi mogli primijeniti Pitagorin poučak mi uzimamo da su stranice a i b katete pravokutnog trokuta, a dijagonala postaje hipotenuza pravokutnog trokuta.



Slika 35 - Primjena Pitagorina poučka na pravokutnik



Slika 36 - Primjena Pitagorina poučka na kvadrat

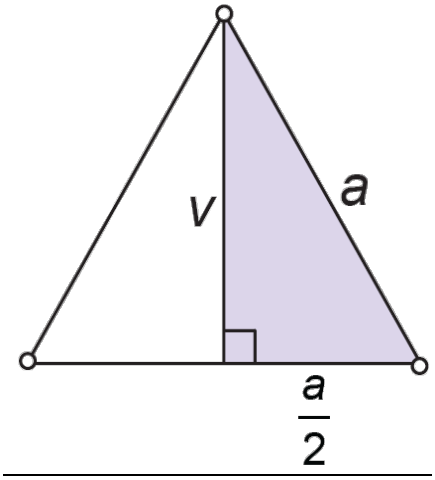
Formule:

Pravokutnik - $d^2 = a^2 + b^2$

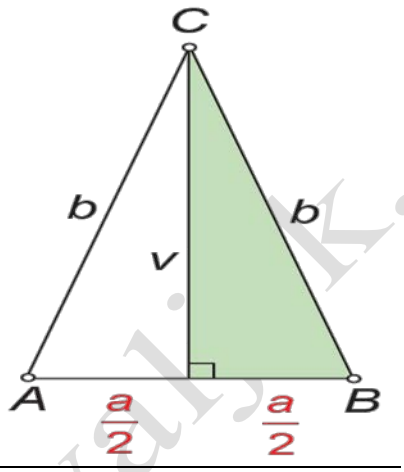
Kvadrat - $d = a\sqrt{2}$

<u>Primjena Pitagorina poučka na jednakostranični i jednakokračni trokut</u>

Kod primjene Pitagorinog poučka na jednakostranični i jednakokračni trokut uzimamo da je visina v na stranicu a kateta pravokutnog trokuta. Tada su kod jednakostraničnog trokuta dvije katete v i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza je a, dok su kod jednakokračnog trokuta katete v i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza je b.



Slika 37 - Primjena Pitagorina poučka na jednakostranični trokut



Slika 38 - Primjena Pitagorina poučka na jednakokračni trokut

Formule:

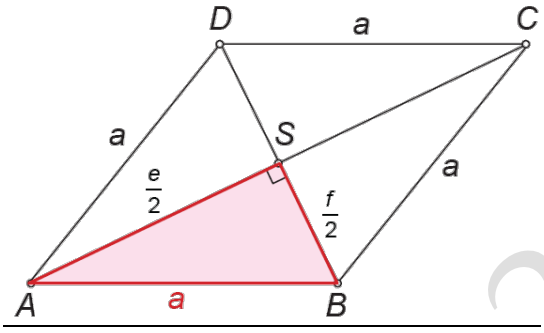
Jednakostranični trokut - $a^2 = v^2 + (\frac{a}{2})^2$

$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Jednakokračni trokut - - $b^2 = v^2 + (\frac{a}{2})^2$

Primjena Pitagorinog poučka na romb

Kod primjene Pitagorinog poučka na romb uzimamo da su polovine dijagonala romba $\frac{e}{2}$ i $\frac{f}{2}$ katete pravokutnog trokuta, dok je stranica romba a hipotenuza pravokutnog trokuta



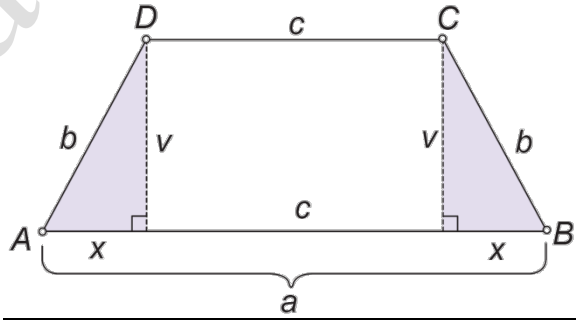
Slika 39 - Primjena Pitagorina poučka na romb

Formule:

$$a^2 = (\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2$$

Primjena Pitagorinog poučka na jednakokračni trapez

Kod primjene Pitagorinog poučka na jednakokračni trapez uzimamo da je hipotenuza pravokutnog trokuta krak b, dok je jedna kateta visina v trapeza. Za drugu katetu moramo si izraziti veličinu x koju izračunavamo po formuli $x = \frac{a-c}{2}$.



Slika 40 - Primjena Pitagorina poučka na jednakokračni trapez

Formule:

$$b^2 = v^2 + x^2$$

Postotak

Postotak najlakše možemo definirati kao razlomak s nazivnikom 100. Tako možemo reći da je:

$$\frac{10}{100} = 10\%, \qquad \frac{75}{100} = 75\%, \qquad \frac{4}{100} = 4\%$$

ili, poopćeno $\frac{p}{100} = p\%$.

Kao što se može vidjeti, svaki razlomak sa nazivnikom 100 možemo vrlo lako zapisati kao postotak. Ukoliko nazivnik nije jednak 100, mi ga moramo svesti na to, pomoću skraćivanja ili proširivanja razlomka.

Primjer:

$$\frac{4}{25} = \frac{4 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{16}{100} = 16\%, \qquad \frac{76}{200} = \frac{76:2}{200:2} = \frac{38}{100} = 38\%$$

Decimalne brojeve isto možemo pretvarati u postotak tako da ih prvo pretvorimo u razlomak sa nazivnikom 100, a onda ga zapišemo kao postotak.

Izračunavanje postotaka je veoma bitno u svakidašnjem životu, pa će na primjeru biti pokazan postupak kako se to izračunava.

Primjer:

U 7.a razredu ima 30 učenika, a od toga je 9 djevojčica. Koliki je postotak djevojčica u razredu?

$$p\% \cdot 30 = 9$$
$$\frac{p}{100} \cdot 30 = 9$$
$$30p = 900$$
$$p = 30\%$$

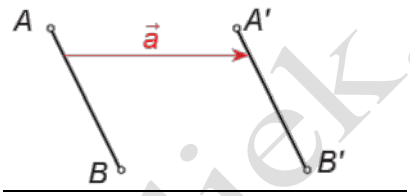
U razredu ima 30% djevojčica

Preslikavanje ravnine

Kod preslikavanja ravnine ćemo promatrati **translaciju, osnu simetriju, centralnu simetriju i rotaciju.**

Translacija

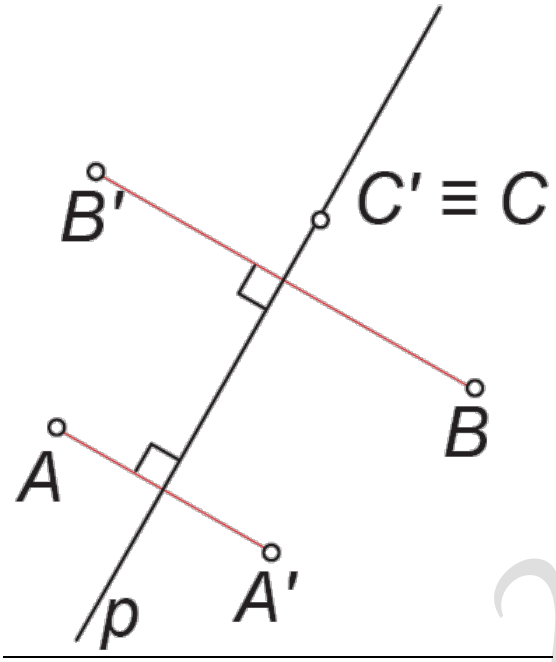
Translacija je postupak preslikavanja ravnine kod koje preslikavamo određene slike u odnosu na neki vektor. Translacija za vektor $\underset{a}{\rightarrow}$ je takvo preslikavanje ravnine koje svakoj točki T pridružuje neku točku T' tako da je $\underset{TT'}{\longrightarrow} = \underset{a}{\rightarrow}$.



Slika 41 - Translacija dužine

Osna simetrija

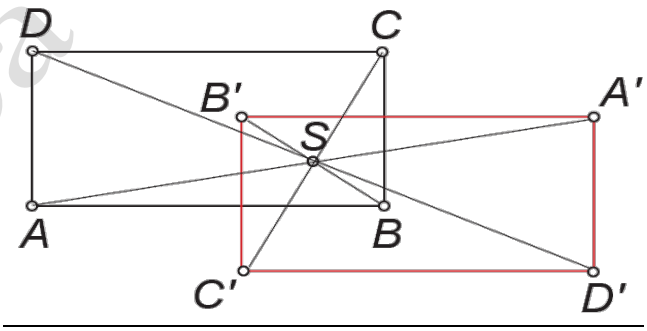
Osna simetrija je preslikavanje ravnine u odnosu na nekakav pravac. To preslikavanje se vrši na takav načina da iz svake točke početnog geometrijskog lika povučemo okomicu u odnosu na zadani pravac. Potom s druge strane pravca na toj okomici odredimo točku koja je jednako udaljena od pravca kao i početna točka. Ukoliko se točka nalazi na pravcu, kažemo da se ona preslikava sama u sebe.



Slika 42 - Osna simetrija

Centralna simetrija

Centralna simetrija je način preslikavanja kod kojeg postoji točka koja se zove centar simetrije, obično ju označavamo sa slovom S. Preslikavanje točke T kod centralne simetrije se vrši na takav način da se kroz centar simetrije provuče pravac iz točke T i kod preslikavanja točka S postaje polovište dužine TT'.



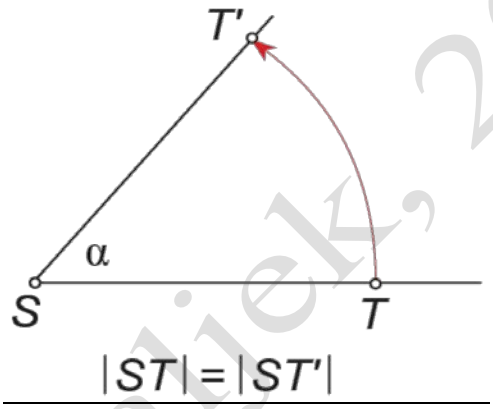
Slika 43 - Centralna simetrija

Rotacija

Rotacija oko točke S za kut α jest preslikavanje koje svakoj točki T ravnine (različitoj od točke S) pridružuje točku T′ na sljedeći način:

- pravci ST i ST′ su krakovi kuta α (TST′ = α)
- točke T i T ′ jednako su udaljene od S (ST = ST ′).

Kod rotacije moramo razlikovati rotaciju u negativnom smjeru (smjer kazaljke na satu) i rotaciju u pozitivnom smjeru (suprotno od smjera kazaljke na satu).



Slika 44 - Primjer rotacije u pozitivnom smijeru

Prirodni brojevi

Prirodni brojevi su brojevi koji se dobivaju brojanjem. Najmanji prirodni broj je 1, dok najveći prirodni broj ne postoji. Skup prirodnih brojeva se označava sa slovom **N** i možemo pisati:

$$N = \{1,2,3,4,5,6, \dots\}$$

Broj 0 ne pripada skupu realnih brojeva.

Budući da je zbrajanje i oduzimanje prirodnih brojeva isto kao i kod cijelih brojeva, na tome se ne bi prevrše zadržavali, budući da je to već objašnjeno.

Dijeljenje prirodnih brojeva

Računska radnja u kojoj se iz umnoška i jednog faktora određuje drugi faktor naziva se **dijeljene brojeva. Djeljenik** je broj koji dijelimo. **Djelitel**j je broj koji dijelimo. **Količnik ili kvocijent** je rezultat dijeljena brojeva.

Primjeri:

924 : 4 = 231

1 425 : 5 = 285

2 187 : 9 = 243

3 812 : 4 = 953

157 224 : 8 = 19653

12 622 002 : 6 = 210366

Izvođenje više računskih radnji

Računske radnje su:

a) Zbrajanje i oduzimanje - računske radnje istog stupnja.

b) Množenje i dijeljenje - računske radnje istog stupnja.

Računske radnje istog stupnja u izrazu bez zagrada, rješavamo redom, slijeva udesno.

Primjeri:

a) 56-32+17=

=24+17=

=41

b) 22:2·6:3·2=

=11·6:3·2=

=66:3·2=

=22·2=

=44

Redoslijed računskih operacija je:

U zadatku bez zagrada prvo računamo množenje i dijeljenje.

Primjer:

72+<u>10:5</u>-<u>8·3</u>=

=72+2-24=

=74-24=

=50

Računanje s zagradama

- najprije izračunamo brojevni izraz unutar zagrada, od unutarnjih zagrada prema vanjskim;
- računamo množenje i dijeljenje, redom, slijeva udesno;
- računamo zbrajanje i oduzimanje, redom, slijeva udesno;
- prepisujemo sve što nismo izračunali

Primjer:

$96:(6\cdot(5\cdot4-4))+7=$

$=96:(6\cdot(20-4))+7=$

$=96:(6\cdot16)+7=$

$=96:96+7=$

$=1+7=$

$=8$

Rješavanje s različitim vrstama zagrada:

- Najprije rješavamo okrugle zagrade ( ).
- Zatim rješavamo uglate zagrade [ ].
- nakon toga rješavamo vitičaste zagrade { }.

Primjer:

$2+\{8:[4x1-(6-3)]\}=$

$=2+\{8:[4x1-3]\}=$

$=2+\{8:[4-3]\}=$

$=2+\{8:1\}=$

$=2+8=$

$=10.$

<u>Oduzimanje prirodnih brojeva</u>

Računska radnja u kojoj se iz zadanog zbroja i jednog pribrojnika određuje drugi pribrojnik naziva se **oduzimanje brojeva.**

Umanjenik je prvi broj, onaj od kojega oduzimamo.

Umanjitelj je drugi broj, broj kojeg oduzimamo.

Razlika ili **diferencija** je broj koji dobijemo kao rezultat oduzimanja.

umanjenik ~**9-3=6**~ razlika(diferencija)

/

umanjitelj

Imamo li u izrazu bez zagrada zbrajanje i oduzimanje brojeva, zbrajamo i oduzimamo redom, slijeva udesno.

2 569-564+693+82-561=

=2 005+693+82-561=

=2 698+82-561=

=2 780-561=

=2 219

Oduzmemo li od umanjenika razliku, dobit ćemo umanjitelja.

186-38=148

186-148=38

Zbrojimo li umanjitelja i razliku dobit ćemo umanjenik.

789-421=368

421+368=789

Racionalni brojevi

Racionalni brojevi su svi negativni razlomci, nula i pozitivni razlomci. Skup racionalnih brojeva označava se s **Q**.

Svaki razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{a}{b}$, gdje je **a** cijeli broj, a **b** prirodni broj.

Oblik razlomka $\frac{a}{b}$ a € Z, b € N **je standardni oblik racionalnog broja.**

Za svaki racionalni broj r vrijedi: $\frac{0}{r} = 0 \; i \; \frac{r}{1} = 1$

Racionalne brojeve možemo pridruživati točkama pravca.

Racionalni brojevi $\frac{a}{b} \; i \; -\frac{a}{b}$ su suprotni brojevi.

Modul racionalnog broja (apsolutna vrijednost) je racionalni broj koji za brojnik ima modul brojnika, a za nazivnik modul nazivnika zadanog racionalnog broja.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Primjer: $\left|\frac{-5}{6}\right| = \frac{|-5|}{|6|} = \frac{5}{6}$

Racionalni brojevi mogu se proširivati i skraćivat, a pri tom vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \; i \; \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}, \qquad b \neq o \; i \; n \neq 0$$

Pozitivni i negativni racionalni brojevi

U skupu racionalnih brojeva su svi:

- **prirodni brojevi**
- **cijeli brojevi**
- **razlomci**
- **decimalni brojevi**

Pozitivni racionalni brojevi imaju predznak +, koji najčešće ne pišemo. Negativni racionalni brojevi imaju predznak - . Svaki cijeli broj možemo zapisati u obliku razlomka s nazivnikom 1 .

Decimalni broj zapisujemo u obliku razlomka tako da u nazivniku napišemo odgovarajuću dekadsku jedinicu, tj. 10, 100 , 1000...

U brojniku ne pišemo decimalnu točku, a nazivniku napišemo 1 i onoliko nula koliko ima decimala. Pozitivni brojevi su svi oni koji su veći od nule , a negativni svi oni koji su manji od nule.

Primjer:

23.5 je pozitivan broj zbog toga jer je on veći od nule i nalazi se na desnoj strani brojevnog pravca.

-19 je negativan broj zbog toga jer je on manji od nule i nalazi se na lijevoj strani brojevnog pravca.

Prikazivanje racionalnih brojeva na pravcu.

Brojevni pravac sadržava tri djela. To su negativni smjer, nula i pozitivni smjer. Negativni smjer nalazi se na lijevoj strani brojevnog pravca, u tom smjeru svi brojevi su manji od nule pa zbog toga imaju znak - . Nula se uvijek nalazi na sredini brojevnog pravca pa zbog toga ona nije ni pozitivna ni negativna. Pozitivni smjer nalazi se na desnoj strani brojevnog

pravca, u tom smjeru svi su brojevi veći od nule pa zbog toga imaju predznak + koji se najčešće ne piše. Razlomke je najjednostavnije prikazati na brojevnom pravcu tako da ih najprije zapišemo u obliku decimalnog broja te odredimo između kojih cijelih brojeva se nalaze.

Uspoređivanje racionalnih brojeva

Opća pravila uspoređivanja su:

- negativan broj uvijek je manji od pozitivnog broja
-nula je veća od negativnog broja
-nula je manja od pozitivnog broja

Od dva broja manji je onaj koji je na brojevnom pravcu smješten lijevo, a veći je onaj koji je na brojevnom pravcu smješten desno u odnosu na drugi broj. Dva razlomka možemo usporediti i koristeći pravilo unakrsnog množenja. No prije uspoređivanja na taj način, treba razlomke zapisati u standardnome obliku.

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ako je $a \cdot d > b \cdot c$
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ako je $a \cdot d = b \cdot c$
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $a \cdot d < b \cdot c$

Primjer:

Usporedite sljedeće brojeve!

2 i 5 , -1 i 0 , 5 i -5

2>5 = broj 2 manji je od broja pet jer je on veći.

-1<0 = broj -1 manji je od nule jer je nula veća od negativnog broja.

5>-5 = broj 5 je veći jer je negativan broj uvijek manji od pozitivnog broja.

Razlomci

Razlomci su brojevi koji nam govore na koliko je dijelova podijeljeno jedno cijelo. Svaki razlomak se sastoji od **brojnika, razlomačke crte i nazivnika**. Brojnik je broj koji se nalazi iznad razlomačke crte, a nazivnik je broj koji se nalazi ispod razlomačke crte. Razlomačka crta označava matematičku operaciju dijeljenja.

Primjer:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{6}{6}, \frac{6}{4}, \frac{8}{2}$$

Ukoliko je brojnik manji od nazivnika, onda se taj razlomak zove **pravi razlomak** (vrijednost mu je manja od 1), a ako je brojnik veći od razlomka tada se razlomak zove **nepravi razlomak** (vrijednost mu je veća od 1 i može se pretvoriti u **mješoviti broj**). Kada su brojnik i nazivnik razlomka jednaki, onda razlomak ima vrijednost 1 (jedno cijelo). Ako je brojnik višekratnik nazivnika, tada razlomak ima vrijednost nekog cijelog broja.

Primjer pretvaranja nepravog razlomka u mješoviti broj:

$$\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

<u>Računske operacije s razlomcima</u>

Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika – razlomci jednakih nazivnika se uspoređuju na takav način da im se gledaju brojnici. Onaj razlomak koji ima veći brojnik je ujedno i veći razlomak

$$\frac{9}{5} > \frac{7}{5}$$

Proširivanje razlomaka – proširiti razlomak znači pomnožiti i brojnik i nazivnik toga razlomka sa istim brojem.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$$

Skraćivanje razlomaka – skratiti razlomak znači podijeliti i brojnik i nazivnik toga razlomka sa istim brojem. Do kraja skratiti razlomak znači podijeliti i brojnik i nazivnik toga razlomka sa njihovim najvećim zajedničkim djeliteljem.

$$\frac{20}{25} = \frac{20:5}{25:5} = \frac{4}{5}$$

Zbrajanje i oduzimanje razlomaka – moramo razlikovati dvije vrste zbrajanja razlomaka. Ukoliko zbrajamo i oduzimamo razlomke jednakih nazivnika, tada nazivnik prepišemo, a brojnike zbrojimo ili oduzmemo. Rezultat, ako je to moguće, moramo skratiti do kraja.

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4+1-2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ako zbrajamo ili oduzimamo razlomke različitih nazivnika, onda rezultat moramo svesti na zajednički nazivnik. To se radi tako da nađemo najmanji zajednički višekratnik od razlomaka koje zbrajamo ili oduzimamo. Rezultat također moramo skratiti do kraja.

$$\frac{5}{6} + \frac{8}{4} = \frac{10+24}{12} = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$$

Množenje razlomaka – Razlomke množimo tako da posebno množimo brojnike, a posebno nazivnike. Ukoliko je moguće, rezultat se isto mora skratiti do kraja.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$$

Dijeljenje razlomaka – razlomke dijelimo na takav način da to dijeljenje svedemo na množenje prvog razlomka sa recipročnim razlomkom drugog razlomka. Recipročni razlomak dobijemo tako da brojnik i nazivnik zamijene mjesta. Rezultat se isto mora skratiti do kraja.

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{6}=\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{3}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

Dvojni razlomci – dvojni razlomci su razlomci kojima su i brojnik i razlomak također razlomci. Oni se rješavaju tako da pomnožimo brojnik gornjeg razlomka sa nazivnikom donjeg razlomka (rezultat postaje brojnik rješenja) i nazivnik gornjeg razlomka sa brojnikom donjeg razlomka (to postaje nazivnik rješenja).

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{3}}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 6}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

Sustavi linearnih jednadžbi

Linearna jednadžba s dvjema nepoznanicama je jednadžba oblika ax+by=c, gdje su su a,b i c zadani brojevi, a x i y su nepoznanice. Brojevi a i b su koeficijenti uz nepoznanice (ne mogu iznositi 0), a c je slobodni član.

Rješenje linearne jednadžbe s dvjema nepoznanicama jest svaki uređeni par (x,y) koji kad je uvršten u jednadžbu daje točnu jednakost. Linearna jednadžba s dvjema nepoznanicama ima beskonačno mnogo rješenja. Kažemo da su sustavi s dvjema nepoznanicama ekvivalentni sustavi ako imaju ista rješenja.

Postoje dvije metode rješavanja takvih jednadžbi:

Metoda supstitucije - ideja te metode je da se iz jedne od zadanih jednadžbi sustava izrazi jedna od nepoznanica pomoću druge, a zatim se dobiveni izraz uvrsti u drugu jednadžbu. Na taj način dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom.

Primjer:

Voda u povratnoj boci stoji 12kn.Koliko stoji samo voda, a koliko samo boca ako znamo da je sok 11 kn skuplji od boce?

1.

s+b=12

s-b=11 --> s=11+b <-- supstitucija

2.

s+b=12

(strelica obostrana)

11+b+b=12

3.

11+b+b=12

b+b=12-11

2b=1 /: 2

b=1/2 Cijena boce iznosi pola kune, dakle 0.50 kn.

4.

s=11+b

s=11+ 0.50

s=11.50 Cijena vode iznosi 11 kn i 50 lp.

5.Provjera:

s+b=12

s-b=11

prva jednadžba:

s+b=12

11.5 +0.5=12

12=12

Druga jednadžba:

s-b=11

11.5-0.5=11

11=11

6. Rješenje sustava je uređeni par (11.5, 0.5)

Metoda suprotnih koeficijenata - bit ove metode je da uz istu nepoznanicu u obje jednadžbe dobijemo suprotne koeficijente, što postižemo množenjem jedne ili obje jednadžbe odgovarajućim brojem. Zbrajanjem tako dobivenih jednadžbi dobijemo jednadžbu s jednom nepoznanicom.

Primjer:

$x+y=3$

$x+2y=4$

Rješenje

$x+y=3$ pomnožimo s -2

$-2x-2y=-6$

$x+2y=4$

zbrojimo jednadžbe

$(-2x+x)+(-2y+2y)=(-6)+4$ $x=6-4$ $x=2$

Uvrstimo x u $x+y=3$ $2+y=3$ $y=1$ Rješenje sustava je uređeni par (2,1)

Provjerimo rješenje

$2+1=3$

$2+2\bullet 1=4$

Trokut

Trokut možemo definirati kao dio ravnine omeđen sa tri dužine od kojih svake dvije imaju točno jednu zajedničku točku. Te dužine, koje zovemo stranicama trokuta, također pripadaju trokutu.

Točke u kojima se stranice trokuta spajaju nazivamo vrhovima trokuta. Kutovi između dvije susjedne stranice trokuta koji se nalaze u unutrašnjosti trokuta nazivaju se unutarnji kutovi trokuta, te možemo zapamtiti da je:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

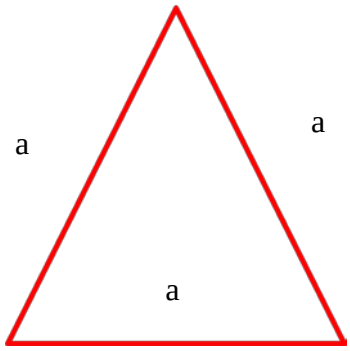
Vrhove trokuta obično označavamo sa slovima A, B i C. Kut α se nalazi kod vrha A trokuta, kut β kod vrha B trokuta, a kut γ kod vrha C trokuta.

<u>Vrste trokuta</u>

Podjelu trokuta možemo napraviti na dva načina. Trokuti se mogu podijeliti prema duljinama stranica i prema vrsti kutova koji se nalaze u trokutu.

Prema duljini stranica, trokuti se dijele na:

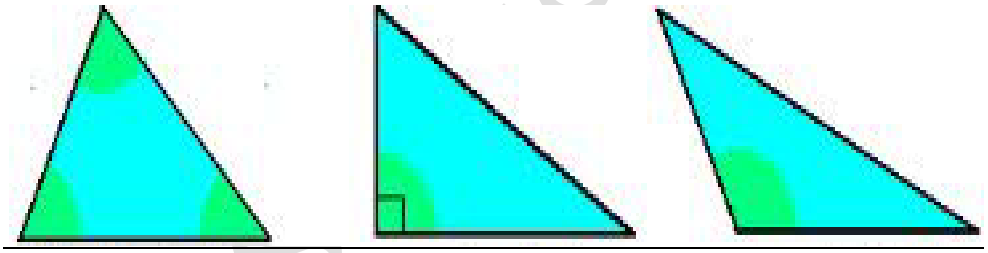
- jednakostraničan - ima sve stranice jednakih duljina (oznaka a). Opseg mu se izračunava po formuli $o = 3a$, a površina po formuli $P = \frac{a \cdot v}{2}$
- jednakokračan ima dvije stranice jednakih duljina koje zovemo krakovi (oznaka b), i treću stranicu koju zovemo osnovica (oznaka a). Opseg mu se izračunava po formuli $o = a + 2b$, a površina po formuli $P = \frac{a \cdot v}{2}$
- raznostraničan - ima sve tri stranice različitih duljina (oznake a, b i c). Opseg mu se izračunava po formuli $o = a + b + c$, a površina po formuli $P = \frac{a \cdot v}{2}$.



Slika 45 - Jednakostraničan trokut

Prema vrsti kutova trokuti se dijele na:

- šiljastokutan – ima sva tri kuta šiljasta,
- pravokutan – ima jedan pravi kut,
- tupokutan – ima jedan tupi kut



Slika 46 - Šiljastokutan, pravokutan i tupokutan trokut

<u>Poučci o sličnosti trokuta</u>

Dva su trokuta slična ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne i odgovarajući kutovi jednakih veličina.

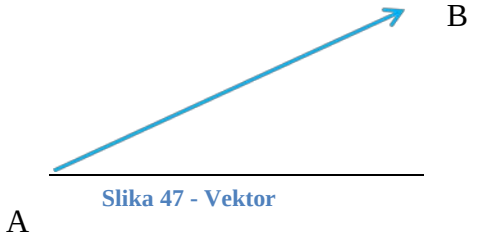
Poučci o sličnosti trokuta su:

- **SSS poučak** - ako su duljine odgovarajućih stranica proporcionalne, tada su trokuti slični
- **KK poučak** - ako trokuti imaju dva kuta jednakih veličina, (a to znači da im je i treći jednak), tada su slični

- **SKS poučak** - ako trokuti imaju jednako velik kut i duljine odgovarajućih stranica uz taj kut proporcionalne, tada su slični
- **SSK poučak** - ako trokuti imaju proporcionalne duljine dviju odgovarajućih stranica i jednako velik kut nasuprot većoj stranici, tada su slični.

Vektori

Vektori ili usmjerene dužine su dužine kod kojih se točno zna koja im je od krajnjih točaka početna, a koja im je završna. Vektori, kao i dužine imaju svoju duljinu koja se naziva duljina vektora.



Slika 47 - Vektor

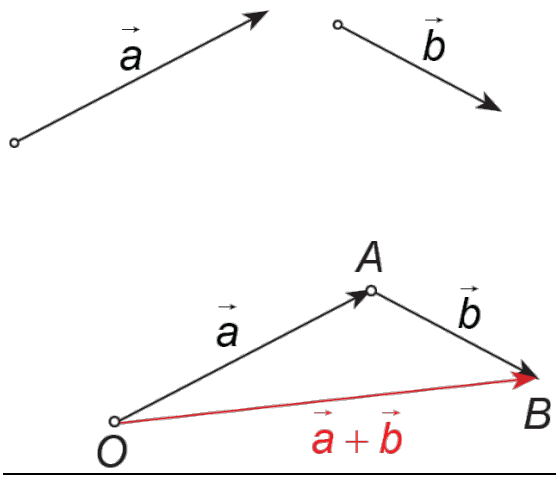
Vektor na slici ima svoj početak u točki A, a kraj (označen strelicom) u točki B i zovemo ga vektor $\overrightarrow{AB}$. Vektori koji imaju strelice u istom smjeru zovu se vektori jednakih orijentacija, a oni koji imaju strelice u suprotnim smjerovima zovu se vektori suprotnih orijentacija.

Vektori koji pripadaju istom pravcu ili međusobno usporednim pravcima zovu se kolinearni vektori. Vektori koji su kolinearni, imaju jednake duljine i jednaku orijentaciju zovu se jednaki vektori, a ako su im orijentacije različite onda se zovu suprotni vektori.

<u>Zbrajanje i oduzimanje vektora</u>

Vektore možemo zbrajati na dva načina, pomoću **pravila trokuta i pravila paralelograma.**

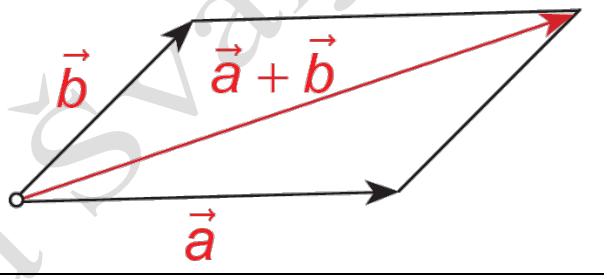
Kod pravila trokuta na kraj prvog vektora nanesemo početak drugog vektora i vjerno ga prenesemo, zadržavajući istu duljinu i orijentaciju. Tada spojimo početak prvog vektora i kraj drugog vektora i vektor koji dobijemo nam je rješenje.



Slika 48 - Pravilo trokuta

Kod pravila paralelograma moramo nacrtati paralelogram koji je određen vektorima koji počinju u istoj točki. Rješenje ili zbroj vektora je vektor koji spaja početnu točku obadva vektora sa suprotnim vrhom paralelograma, ustvari rješenje je dijagonala tog paralelograma.

Oduzimanje vektora možemo promatrati kao dodavanje suprotnog vektora.



Slika 49 - Pravilo paralelograma

Zaključak

Na kraju izrade ovoga projekta, može se zaključiti da je on uspješno zaključen i izrađen, te da su svi zadaci koji su bili zadani na početku projekta uspješno izrađeni. Svaki učenik je, sukladno sa svojim mogućnostima, izradio svoj dio posla i predao učitelju na daljnju obradu. Učenički radovi, u nepromijenjenom obliku naći će se na CD-u koji će biti priložen uz uvezenu skriptu.

Budući da je namjera bila izraditi skriptu koja bi bila laka i pregledna za učenike koji pohađaju osnovnu školu, učenički radovi su djelomično promijenjeni, sve u svrhu bolje preglednosti i jednostavnosti. Na kraju ove skripte će biti naveden popis svih učenika koji su na bilo koji način sudjelovali u izradi ovog projekta. Budući da nemaju svi učenici računalo kod kuće, oni su svoj zadatak napravili uz pomoć učitelja. Izrada ovog projekta je učenicima omogućila da svojim samostalnim radom usput i ponove gradivo matematike.

Budući da je na izradu ovog projekta uloženo mnogo truda i vremena, nadam se da će pridonijeti tome da nekome pomogne da ponovi svoje znanje matematike, ili da služi kao pomoć kod učenja gradiva matematike.

Popis učenika uključenih u projekt

5.a razred	5.b razred
Dunaj Adrijana	Došen Karla
Herak Anamarija	Halužan Kristijan
Hlebec Adriana	Horvat Helena
Pavleković Ana	Kiseljak Dominik
Potočki Lorena	Kiseljak Marija
Sajko Lucija	Kranjčec Kristina
Šakotić Sven	Mutak Lea
Topolovec Luka	Prelčec Dorian
	Slukan Nikolina (Nina)
	Žun Klaudija

8.a razred

Cerovec Dario
Cvetko Denis
Erdelja Maja
Erdelja Željka
Florjan Mihael
Haldek Filip
Inkret Suzana
Ivanković Barbara
Kamenečki Željka
Kovač-Goda Dino
Potočki Antonela
Vuzem Mario

8.b razred

Cerovečki Maja
Jurinjak Denis
Jurinjak Mia
Košutić Kristina
Mikša Filip
Pohižek Petra
Slukan David
Slukan Lovro
Špoljar Vida
Tušek Tea

Popis slika

Literatura

1. Internet
2. Gordana Paić, Željko Bošnjak, Boris Čulina – Matematički izazovi 5, Alfa, Zagreb
3. Gordana Paić, Željko Bošnjak, Boris Čulina – Matematički izazovi 6, Alfa, Zagreb
4. Gordana Paić, Željko Bošnjak, Boris Čulina – Matematički izazovi 7, Alfa, Zagreb
5. Gordana Paić, Željko Bošnjak, Boris Čulina – Matematički izazovi 8, Alfa, Zagreb